



## Systèmes non-linéaires sous-échantillonnés

Sébastien Hénaff, Ina Taralova, Claude Moog

► **To cite this version:**

Sébastien Hénaff, Ina Taralova, Claude Moog. Systèmes non-linéaires sous-échantillonnés. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jun 2010, Nancy, France. <hal-00466805>

**HAL Id: hal-00466805**

**<http://hal.univ-nantes.fr/hal-00466805>**

Submitted on 24 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Systèmes non-linéaires sous-échantillonnés

Sébastien HÉNAFF, Ina TARALOVA, Claude H. MOOG

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes — IRCCyN,  
UMR 6 597 — CNRS

1, rue de la Noë. 44 321 Nantes cedex 3, France.

*sebastien.henaff@irccyn.ec-nantes.fr, ina.taralova@irccyn.ec-nantes.fr, claude.moog@irccyn.ec-nantes.fr*

*Résumé*— Après un état de l’art sur la synchronisation des systèmes chaotiques, nous définissons une nouvelle classe de systèmes : les systèmes sous-échantillonnés. A notre connaissance, aucune synthèse d’observateurs n’a été mise en œuvre pour cette classe de systèmes. Le problème non-standard des systèmes sous-échantillonnés a été reformulé sous forme standard d’espace d’états, ce qui a permis d’énoncer ensuite de nouveaux résultats d’observabilité pour cette nouvelle classe de systèmes. Le système de Lozi est choisi comme exemple d’application pour les différents cas de sous-échantillonnage : sous-échantillonnage régulier et connu, quelconque et connu, quelconque et inconnu et chaotique. Les résultats sur l’observabilité et la synthèse d’observateurs avec différents types d’échantillonnage ont montré les limites d’applicabilité de la théorie standard pour cette nouvelle classe de systèmes.

*Mots-clés*— systèmes non linéaires, systèmes à temps discret, sous-échantillonnage, observabilité, observateurs, synchronisation, chaos

## I. INTRODUCTION

Le papier fondateur de Pecora et Carroll [1] démontrant que deux systèmes chaotiques peuvent se synchroniser a suscité une pléthore de travaux dans ce domaine, en particulier par les physiciens. Les automaticiens ont rejoint cette thématique de recherche après les travaux de Nijmeijer démontrant que le problème de la synchronisation revient à faire la synthèse d’observateurs [2].

Une majorité de travaux de synchronisation de systèmes chaotiques concernent les systèmes en temps continu. Cependant, les systèmes chaotiques en temps discret ont la particularité de pouvoir s’exprimer d’une manière plus simple et à un ordre réduit. Ainsi, Lozi [3] proposa un système chaotique qui est aussi performant d’un point de vue statistique que les générateurs pseudo-aléatoires. Ces bonnes propriétés sont en partie obtenues grâce à l’utilisation d’une nouvelle opération où, contrairement aux systèmes traditionnels, la mesure de sortie est réalisée à des instants irréguliers. Ceci conduit à définir une nouvelle classe de systèmes en temps discrets sous-échantillonnés, qu’ils soient chaotiques ou non. Grassi a réalisé la synchronisation de systèmes en cascade [4]. La notion de sous-échantillonnage peut-être implicitement utilisée lorsqu’on considère  $p$  systèmes identiques particuliers en cascade. Le problème de sous-échantillonnage est également pertinent en commande, typiquement quand le capteur fournit des mesures en fonction de la vitesse du processus (par exemple codeur incrémental sur un axe rotatif) et non pas en fonction de la période d’échantillonnage de la commande.

Cette notion de sous-échantillonnage est définie pour la première fois de manière formelle dans la suite de cet article. Des propriétés fondamentales telles que l’observabilité sont étudiées, il est en effet montré que le sous-

échantillonnage peut conduire à une perte d’observabilité et peut rendre par conséquent la synchronisation irréalisable.

L’intérêt des observateurs nonlinéaires [5, 6] pour assurer la synchronisation est à présent bien connu. Deux familles d’outils permettent de reconstruire les états d’un système à partir de sa sortie. La reconstruction par inversion de système [7] calcule la valeur des états antérieurs aux mesures de sortie disponibles alors que les observateurs estiment la valeur des états postérieurs aux données de sortie. Les observateurs permettent, en outre, de réaliser une synchronisation asymptotique qui sera plus robuste vis à vis des imprécisions de la sortie.

La suite de cet article est organisée de la manière suivante : La section II définit cette notion de sous-échantillonnage de manière formelle en introduisant la nouvelle classe de systèmes. Ces systèmes sont ensuite réécrits en section III sous forme standard. Cette réécriture permettra d’énoncer des résultats d’observabilité pour cette classe de systèmes en section IV. L’observabilité et la synthèse des observateurs sont ensuite appliquées au système chaotique de Lozi en section V.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

Certains systèmes sont constitués d’une équation d’état classique, générant une dynamique propre, à laquelle est associée une équation de sortie dont certains éléments sont inaccessibles ou ignorés à certains instants, réguliers ou non. Pour modéliser ces systèmes, nous introduisons la définition de systèmes sous-échantillonnés.

Considérons un système en temps discret classique

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n)) \\ y(n) = h(x(n)) \end{cases} \quad (1)$$

avec  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  et  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  deux applications non-linéaires analytiques.  $x$  représente les états du système et  $y$  sa sortie.

*Définition 1* (sous-échantillonnage) Un sous-échantillonnage du système (1) est défini par une application

$$\begin{aligned} q : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ k &\mapsto q(k) \end{aligned}$$

injective et strictement croissante.

Le système sous-échantillonné résultant est régi par le système d’équations suivant :

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n)) \\ y(k) = h(x(q(k))) \end{cases} \quad (2)$$

Dans ce système, les états  $x$  évoluent suivant l’indice  $n$  alors que la sortie du système  $y$  évolue suivant l’indice  $k$ ,

il s'agit là de l'effet du sous-échantillonnage. En effet la sortie de (1) n'est pas mesurée à tous les instants  $n$  mais seulement aux instants  $q(k)$ . Le cas limite serait atteint lorsque  $q$  vaudrait l'identité. Dans ce cas, on n'aurait pas de sous-échantillonnage.

Le pas de sous-échantillonnage  $p(k)$  est à présent défini comme étant le nombre de mesures ignorées entre deux instants  $k$  et  $k + 1$ . Il permettra de réécrire (2) sous une réalisation standard et de distinguer différentes classes de systèmes sous-échantillonnés.

*Définition 2* (pas de sous-échantillonnage) Le pas  $p$  d'un sous-échantillonnage  $q$  est défini par

$$p(k) = q(k + 1) - q(k), k \in \mathbb{N}$$

*Formulation du problème :*

Étant donné un système sous-échantillonné (2), existe-t-il une fonction  $F$ , telle que localement,

$$x(k) = F(y(k), y(k + 1), \dots, y(k + n))$$

Il s'agit typiquement d'un problème d'observation.

On étudie habituellement l'observabilité des systèmes pour s'assurer qu'un observateur peut bien exister. Le système (1) est localement observable si la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  soit de rang  $N$ .

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y(n)}{\partial x_1(n)} & \frac{\partial y(n)}{\partial x_2(n)} & \dots & \frac{\partial y(n)}{\partial x_N(n)} \\ \frac{\partial y(n+1)}{\partial x_1(n)} & \frac{\partial y(n+1)}{\partial x_2(n)} & \dots & \frac{\partial y(n+1)}{\partial x_N(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y(n+N)}{\partial x_1(n)} & \frac{\partial y(n+N)}{\partial x_2(n)} & \dots & \frac{\partial y(n+N)}{\partial x_N(n)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Le sous-échantillonnage n'est pas une opération anodine car un sous-échantillonnage d'un système observable peut conduire à une perte d'observabilité. L'exemple suivant le met en évidence.

*Exemple 1 :* Considérons le système suivant de la forme (1) avec un pas  $p = 1$ .

$$\begin{cases} x_1(n + 1) = x_2(n) \\ x_2(n + 1) = x_1(n) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

$y(2k) = x_1(0)$  et  $y(2k + 1) = x_2(0)$ . Par conséquent, ce système est complètement observable. Considérons désormais la même fonction mais sous-échantillonnée toutes les deux itérations  $q(k) = 2k$

$$\begin{cases} x_1(n + 1) = x_2(n) \\ x_2(n + 1) = x_1(n) \\ y(k) = x_1(2k) \end{cases}$$

Le système précédent est équivalent au système ci-après

$$\begin{cases} x_1(k + 1) = x_1(k) \\ x_2(k + 1) = x_2(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

Donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $y(k) = x_1(k)$  et  $x_2$  évolue indépendamment sans ne jamais agir sur la sortie  $y$ , la deuxième composante  $x_2$  est inobservable. Bien que le premier système soit observable, on se rend compte que ce même système

sous-échantillonné ne l'est plus. L'application d'un sous-échantillonnage peut donc s'accompagner d'une perte d'observabilité.

En revanche, en considérant l'échantillonnage  $q(k) = 3k$ , l'observabilité est conservée.

De manière plus générale, on peut montrer le résultat suivant :

*Lemme 1 :* Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Les rangs de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}_1$  du système (1) et de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}_2$  du système sous-échantillonné (2) satisfont :

$$rg(\mathcal{O}_2) \leq rg(\mathcal{O}_1)$$

La matrice d'observabilité  $\mathcal{O}_2$  sera formellement définie en section IV.

Nous nous attacherons donc à vérifier l'observabilité des systèmes sous-échantillonnés pour différents types de sous-échantillonnage.

### III. RÉÉCRITURE DU SYSTÈME SOUS-ÉCHANTILLONNÉ SOUS FORME STANDARD

L'automatique ne fournit aucun résultat concernant le problème de synchronisation de systèmes sous-échantillonnés. Afin de pouvoir appliquer l'approche système, nous allons reformuler les systèmes sous-échantillonnés pour les rendre conformes à la description standard suivante

$$\begin{cases} x(k + 1) = g(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (4)$$

Les états  $x$  du système (2) doivent évoluer à la même vitesse que la sortie  $y$ . Cela peut-être réalisé en écrivant  $g$  sous la forme d'une composition de  $f$ .

$$g = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$$

Le système sous-échantillonné (2) peut-être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} x(k + 1) = f^{p(k)}(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (5)$$

où  $p$  est le pas de sous-échantillonnage. Le sous-échantillonnage de l'équation de sortie (2) est à présent intégralement transféré dans l'équation d'état de (5).

*Exemple 2 :* Considérons  $(q(0); q(1); q(2)) = (0; 3; 5)$ , alors  $(p(0); p(1)) = (3; 2)$ . Le système sous-échantillonné se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} x(1) = f \circ f \circ f(x(0)) \\ x(2) = f \circ f(x(1)) \\ \dots \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases}$$

Le système (2) a été réécrit sous la forme (4) en utilisant une fonction standard dans l'équation de sortie  $y(k) = h(x(k))$ , ce qui a permis de faire apparaître les mêmes indices dans les deux équations. Mais cette reformulation se réalise au détriment de l'équation d'état, désormais, l'application  $g$  dépend explicitement du pas  $p(k)$ .

#### IV. ÉTUDE D'OBSERVABILITÉ DES MODÈLES DE SOUS-ÉCHANTILLONNAGE

Les observateurs n'ont pas encore été appliqués à de tels systèmes. Nous complexifions les modèles de sous-échantillonnage pour passer petit à petit d'un système sans sous-échantillonnage à un système à sous-échantillonnage complexe. Le premier modèle est donc un système classique ( $p = 1$  ou  $q = id$ ) comme celui du système (1). Le deuxième modèle considère le système sous-échantillonné périodiquement ( $p$  est constant). Vient ensuite le sous-échantillonnage régulier, c'est à dire un sous-échantillonnage à pas  $p$  périodique. Nous considérons ensuite un sous-échantillonnage connu mais quelconque, a priori apériodique et enfin un sous-échantillonnage quelconque et inconnu.

Pour chacun des ces types de sous-échantillonnage, nous voulons adapter les observateurs à ces cas de figure. Mais avant de faire la synthèse des observateurs, la conservation de l'observabilité après sous-échantillonnage doit être vérifiée pour chacun de ces systèmes.

##### A. Système sans sous-échantillonnage

Soit le système de la forme suivante

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(k)) = f(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases}$$

Ce cas de figure est un cas classique, utilisé pour la théorie des observateurs. L'observabilité et la synthèse des observateurs sont celles utilisées classiquement. La matrice d'observabilité devient :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f}{\partial x_1} & \frac{\partial h \circ f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h \circ f}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h \circ f^{N-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h \circ f^{N-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{N-1}}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

##### B. Sous-échantillonnage périodique

Le système à sous-échantillonnage périodique s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(k)) = f^p(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases}$$

Cette fois, le pas de sous-échantillonnage  $p$  est fixe. La fonction  $g$  est alors  $f$  composée  $p$  fois,  $g = f^p$  donc on peut se raccrocher au problème classique précédent en remplaçant  $f$  par  $f^p$ .

##### C. Sous-échantillonnage alterné

Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux pas de sous-échantillonnage. Nous considérons un système dont le pas de sous-échantillonnage alterne de  $p_1$  à  $p_2$ . Le système devient

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} g(x(2k)) = f^{p_1}(x(2k)) \\ g(x(2k+1)) = f^{p_2}(x(2k+1)) \end{cases}$$

ou pour se ramener à (5),  $p(2k) = p_1$  et  $p(2k+1) = p_2$ .

L'étude de l'observabilité diffère un peu par rapport au critère habituel dans le sens où le système change de modèle dans le temps. Vidal, Chiuso et Soatto ont étudié l'observabilité au cours d'une trajectoire d'un système à matrices constantes par saut [8].

L'étude de l'observabilité locale conduit à évaluer le rang de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  d'ordre  $(2(s+1); N)$  avec

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f^{p_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{p_1}}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f^{p_1+p_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{p_1+p_2}}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f^{2p_1+p_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{2p_1+p_2}}{\partial x_N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h \circ f^{sp_1+sp_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{sp_1+sp_2}}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f^{(s+1)p_1+sp_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{(s+1)p_1+sp_2}}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Le système sous-échantillonné est localement observable s'il existe un entier  $s$  tel que la matrice  $\mathcal{O}$  soit de rang  $N$ .

##### D. Sous-échantillonnage quelconque connu

Nous considérons dans cette section que  $p$  est une variable qui évolue au cours du temps mais qui est connue de l'observateur en chaque instant.

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(k)) = f^{p(k)}(x(k)) \\ y(k) = (h(x(k)); p(k)) \end{cases}$$

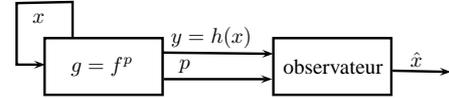


Fig. 1  
OBSERVATEUR DE SYSTÈME À SOUS-ÉCHANTILLONNAGE CONNU

Dans la continuité de la section précédente, le système est localement observable sur une trajectoire donnée, identifiée par le sous-échantillonnage  $q$ , s'il existe un entier  $s$  tel que le rang de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  soit  $N$ .

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f^{q(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial h \circ f^{q(1)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{q(1)}}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h \circ f^{q(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial h \circ f^{q(2)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{q(2)}}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h \circ f^{q(s)}}{\partial x_1} & \frac{\partial h \circ f^{q(s)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h \circ f^{q(s)}}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (6)$$

##### E. Sous-échantillonnage quelconque inconnu

Ce modèle est le modèle le plus difficilement observable. Contrairement aux modèles précédents, on considère que le pas de sous-échantillonnage  $p$  n'est pas connu de l'observateur.  $p$  reste donc une variable qui n'apparaît pas au niveau de la sortie  $y$ .

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(k)) = f^{p(k)}(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases}$$

*Formulation du problème :*

Étant donné un système sous-échantillonné à sous-échantillonnage quelconque inconnu, existe-t-il une fonction  $F$ , telle que localement,

$$x(k) = F(y(k), y(k+1), \dots, y(k+n))$$

*Définition 3 :* Le système sera dit observable par états et pas de sous-échantillonnage si les variables d'états  $(x, p)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{p})$  sont distinguables lorsque  $(x, p) \neq (\tilde{x}, \tilde{p})$ .

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n) \\ x_2(n+1) = \alpha x_2(n) \\ y[k] = h(x(q[k])) \end{cases}$$

où  $0 < \alpha < 1$  et  $x_2(0) > 0$ .

Les sorties successives valent :

$$\begin{cases} y[0] = x_1[0] \\ y[1] = \alpha^{q[0]-1} x_2[0] \\ y[2] = \alpha^{q[1]-1} x_2[0] \end{cases}$$

*observabilité globale*

Ce système n'est pas globalement observable par état et pas de sous-échantillonnage.

Considérons une deuxième condition initiale  $\tilde{x}_2(0)$  telle que  $x_2(0) = \alpha \tilde{x}_2(0)$ , ou  $x_2(0) = \tilde{x}_2(1)$ .

Considérons ensuite les pas de sous-échantillonnage  $\tilde{p}$  définis par  $\tilde{q}[k] = q[k] + 1 \forall k \in \mathbb{N}$ . Il vient  $\tilde{y}[1] = \alpha^{\tilde{q}[0]-1} \tilde{x}_2[0] = y[1]$ . Et  $\tilde{y}[k] = y[k] \forall k \in \mathbb{N}$ . Donc ce système est globalement inobservable.

*observabilité locale*

Plus généralement, une condition initiale  $x(0)$  est indistinguable avec  $\tilde{x}(0)$  si  $x_1(0) = \tilde{x}_1(0)$  and  $\tilde{x}_2(0) = \alpha^k x(0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc ce système est localement observable.

V. APPLICATION SUR LE SYSTÈME DE LOZI

Dans la recherche d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires, Lozi a proposé un système en introduisant un sous-échantillonnage chaotique dans l'équation de sortie [3].

Le système d'ordre deux est régi par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = 2A_i \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $A_i$  dépend de la valeur des états  $x$ .

$$A_i = \begin{cases} A_1 & \text{si } x \in [0; 1]^2 \\ A_2 & \text{si } x \in [-1; 0] \times [0; 1] \\ A_3 & \text{si } x \in [-1; 0]^2 \\ A_4 & \text{si } x \in [0; 1] \times [-1; 0] \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(1 - \epsilon_1) & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & -(1 - \epsilon_2) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_1 & -\epsilon_1 \\ \epsilon_2 & -(1 - \epsilon_2) \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 1 - \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -(1 - \epsilon_1) & \epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & 1 - \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

Cette fonction d'état est en réalité un couplage de deux fonctions triangle qui sont connues pour être chaotiques sur  $[-1; 1]$ . Il s'avère que la fonction d'état définie ci-dessus est également chaotique sur son attracteur. Un sous-échantillonnage, dépendant de la valeur des états, est ensuite appliqué, ce pourquoi nous l'appellerons sous-échantillonnage chaotique par opposition aux autres formes d'échantillonnages de la section précédente.

$$y(k) = x_1(n) \text{ si } x_N(n) \in [T, 1]$$

où  $T$  est le paramètre de sous-échantillonnage.

Suivant la section III, ce système s'exprime sous une forme standard par

$$\begin{cases} x(k+1) = f^p(x(k)) & \text{si } \begin{cases} \forall i < p, \Pi_2(f^i(x(k))) < T \\ \Pi_2(f^i(x(k))) \geq T \end{cases} \\ y(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (7)$$

$\Pi_j(x)$  désigne la projection de l'état  $x$  suivant la  $j$ -ième composante :  $\Pi_j(x) = x_j$ .

A. Observabilité

Le lemme suivant donne la condition d'observabilité locale du système sous-échantillonné.

*Lemme 2 :* Le système (7) est localement observable sur une trajectoire à sous-échantillonnage  $q$  donné s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\Pi_1 \frac{\partial f^{q(k)}}{\partial x_2} \neq 0$ .

Pour arriver à cette conclusion, considérons la matrice d'observabilité (6). Un système sous-échantillonné est localement observable sue une trajectoire déterminée s'il existe un  $s$  tel que la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  soit de rang  $N$ . Ici, elle s'exprime par :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Pi_1 \frac{\partial f^{q(1)}}{\partial x_1} & \Pi_1 \frac{\partial f^{q(1)}}{\partial x_2} \\ \Pi_1 \frac{\partial f^{q(2)}}{\partial x_1} & \Pi_1 \frac{\partial f^{q(2)}}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \Pi_1 \frac{\partial f^{q(s)}}{\partial x_1} & \Pi_1 \frac{\partial f^{q(s)}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice d'observabilité est de rang deux s'il existe un entier  $k$  tel que la quantité  $\Pi_1 \frac{\partial f^{q(k)}}{\partial x_2}$  soit non nulle.

Un calcul formel de cette quantité a été mené pour des compositions  $q(k)$  inférieures à dix. Il vient qu'en dehors de singularités paramétriques, le système y est localement observable.

B. Synthèse d'observateurs

Dans cette partie, nous étudions quatre classes de systèmes : les systèmes sans sous-échantillonnage, à sous-échantillonnage connu, à sous-échantillonnage quelconque inconnu et enfin à sous-échantillonnage chaotique.

B.1 Système sans sous-échantillonnage

Le système est un système affine par morceaux qui ne peut pas s'écrire exactement sous une forme de Lur'e. Par conséquent, plusieurs observateurs linéaires sont à considérer et l'un d'entre eux converge. Des observateurs à convergence exacte et asymptotique ont été réalisés dans [9].

## B.2 Sous-échantillonnage quelconque et connu

Soit un sous-échantillonnage quelconque  $p$  connu. La fonction d'état s'écrit

$$f(x) = \mathbf{1} + 2A_{j_1}x, \quad j_1 \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$$

avec  $\mathbf{1} = (1 \ 1)^t$

$$\Rightarrow f^2(x) = \mathbf{1} + 2A_{j_1}\mathbf{1} + 4A_{j_1}A_{j_2}x$$

$$\Rightarrow f^3(x) = \mathbf{1} + 2A_{j_1}\mathbf{1} + 4A_{j_1}A_{j_2}\mathbf{1} + 8A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}x$$

Au final,  $n$  compositions de la fonction  $f$  donnent

$$f^n(x) = \left( \sum_{k_1=0}^{n-1} 2^{k_1} \prod_{k_2=1}^{k_1} A_{j_{k_2}} \right) \mathbf{1} + 2^n \left( \prod_{k=1}^n A_{j_k} \right) x$$

Cette fonction est toujours une fonction affine par morceaux et peut s'écrire sous la forme

$$f^n(x) = Ax + B$$

avec

$$A = 2^n \prod_{k=1}^n A_{j_k}$$

$$B = \left( \sum_{k_1=0}^{n-1} 2^{k_1} \prod_{k_2=1}^{k_1} A_{j_{k_2}} \right) \mathbf{1}$$

On peut alors réaliser un observateur de Luenberger

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B} + KC(x(k) - \hat{x}(k))$$

On se retrouve alors dans le cas classique de l'observateur d'un système affine par morceaux. La simulation suivante a réalisé la synchronisation d'un système sous-échantillonné par un observateur dans le cas où l'évolution des pas  $p$  est connue de l'observateur, cette évolution de pas est disponible en figure 2. La figure 3 affiche l'erreur quadratique entre les états du système autonome et de ceux de l'observateur. Nous appliquons une synchronisation exacte toutes les vingt itérations (le reste du temps, l'observateur est éteint). La divergence des états entre les instants de resynchronisation est due à la précision machine finie et au fait que la fonction est chaotique. Ainsi, entre deux synchronisations successives, le système autonome et l'observateur de désynchronisent à une vitesse proportionnelle aux exposants de Lyapunov. Dans ce système, chaque composition produit une divergence identique donc il est possible de prédire l'évolution qualitative de l'erreur de synchronisation en sommant les compositions, ce qui est fait en figure 4. Cette figure est qualitativement la même que celle de l'erreur de synchronisation. La simulation a été réalisée sous les conditions paramétriques  $(\epsilon_1; \epsilon_2) = (0.2; 0.1)$  et le paramètre de sous-échantillonnage vaut  $T = 0.6$ .

## B.3 Sous-échantillonnage quelconque inconnu

Ce modèle de sous-échantillonnage est le cas où les hypothèses sont les moins restrictives. D'après la section IV-E, il est impossible de reconstruire les états  $x$  et le pas  $p$  à partir d'une sortie  $y$  une composante. Il serait néanmoins possible de les estimer si le pas ne pouvait prendre qu'un nombre fini de valeurs  $p \in \llbracket 1; p_{\max} \rrbracket$ . Le système de Lozi considéré n'a pas cette propriété car  $p \in \mathbb{N}$ .

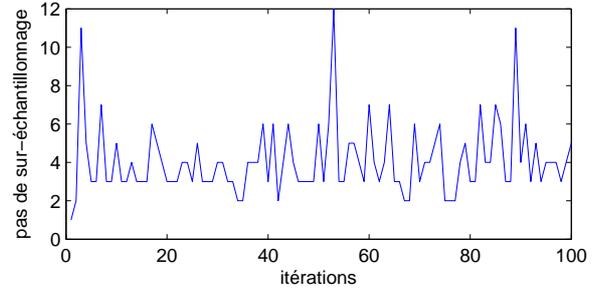


Fig. 2  
ÉVOLUTION DU PAS  $p$

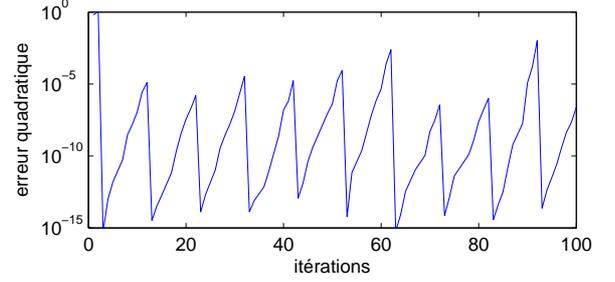


Fig. 3  
ÉVOLUTION DE L'ERREUR QUADRATIQUE DE SYNCHRONISATION  
 $\|x - \hat{x}\|$

Une solution technologique consisterait à étudier les probabilités de générer des pas de sous-échantillonnage pour concevoir un observateur qui synchronisera les dynamiques pour une fenêtre de pas considérée  $p \in \llbracket 1; p_{\max} \rrbracket$  en fonction d'une probabilité de synchronisation voulue.

Par exemple, pour le paramètre de sous-échantillonnage  $T = 0$ , et en formulant l'hypothèse

$$P[\Pi_2 f(x) > 0 | \Pi_2(x) > 0] = 1/2$$

$$\Rightarrow P[p = 1] = P[\Pi_2 f(x) \geq 0 | \Pi_2(x) \geq 0] = 1/2$$

$$P[p = 2] = P[\Pi_2 f(x) < 0 \ \& \ \Pi_2 f^2(x) \geq 0 | \Pi_2(x) \geq 0]$$

$$= P[\Pi_2 f(x) < 0 | \Pi_2(x) \geq 0] P[\Pi_2 f(x) \geq 0 | \Pi_2(x) < 0]$$

$$P[p = 2] = 1/4$$

Au final, il vient les probabilités suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P[p = n] = 1/2^n$$

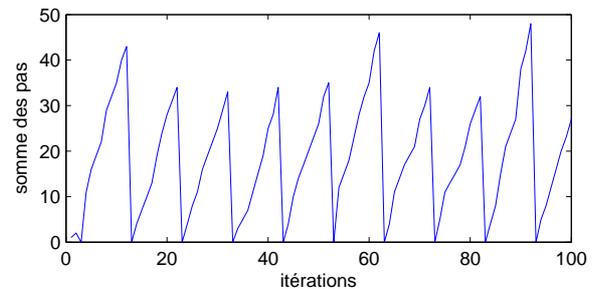


Fig. 4  
ÉVOLUTION DE LA SOMME DES PAS DE SOUS-ÉCHANTILLONNAGE  
 $q = \sum p$

A partir de ces probabilités, on peut tout à fait maximiser les chances de synchroniser en ne considérant que les pas de sous-échantillonnage les plus probables.

La figure 5 représente l'histogramme normalisé des valeurs du pas  $p$  rencontrées pour des valeurs paramétriques  $(\epsilon_1; \epsilon_2) = (0, 2; 0, 1)$  et  $T = 0.6$ . Finalement, en augmentant le paramètre de sous-échantillonnage  $T$ , les faibles valeurs de pas, ici  $p = 1$ , ont une probabilité plus faible d'avoir lieu.

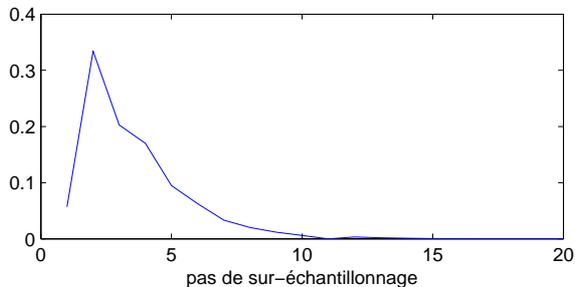


Fig. 5

HISTOGRAMME NORMALISÉ DU PAS DE SOUS-ÉCHANTILLONNAGE  $p$  —  
 $T = 0,6$

#### B.4 Sous-échantillonnage chaotique

Dans le modèle de sous-échantillonnage chaotique, le pas de sous-échantillonnage  $p$  devient une composante de l'état  $(x; p)$  qui dépend aussi de la valeur  $x$ . L'application des observateurs sur ce type de systèmes reviendrait à estimer également cette composante. Or ce pas est une variable discrète  $p \in \mathbb{N}$  et les observateurs ne peuvent estimer que des variables continues donc il sera impossible d'estimer ce pas par des observateurs.

Cependant, si cette non-linéarité pouvait intervenir sous une forme d'injection de sortie ou du moins si la valeur de la sortie fournissait un intervalle auquel appartiendrait  $p$ , il ne serait pas nécessaire de l'estimer.

Les caractéristiques du système pourraient alors être exploitées pour reconstruire ses états. La figure 6 affiche le nombre de compositions qui seront appliquées en fonction de la valeur des états dans le plan de phase pour les valeurs paramétriques  $(\epsilon_1; \epsilon_2) = (0, 2; 0, 1)$  et  $T = 0.6$ .

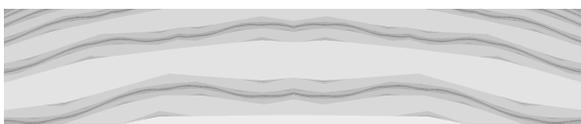


Fig. 6

VALEUR DU PAS DE SOUS-ÉCHANTILLONNAGE  $p$  EN FONCTION DE LA POSITION DE L'ÉTAT  $x$  DANS LE PLAN DE PHASE  $[-1; 1] \times [T; 1]$  AVEC  $T = 0,6$  — CODE COULEUR : BLANC POUR  $p = 1$ ; NOIR POUR  $p = 27$

Finalement, cette structure n'a aucune caractéristique particulière qui puisse être exploitée pour identifier  $p$ .

## VI. CONCLUSION

La notion de sous-échantillonnage a été formalisée pour la classe de systèmes nonlinéaires en temps discret. Quatre

exemples de sous-échantillonnage ont été étudiés, qui peuvent se classer en deux familles : sous-échantillonnage connu et sous-échantillonnage inconnu. Il a été démontré que dans certains cas le sous-échantillonnage peut conduire à une perte d'observabilité. La deuxième contribution concerne la reformulation du problème non-standard du système sous-échantillonné sous forme standard d'espace d'états. Ceci nous a permis d'énoncer ensuite de nouveaux résultats d'observabilité pour cette nouvelle classe de systèmes. Le système de Lozi a été choisi comme exemple de cette nouvelle classe de systèmes. Il met en évidence les limites d'applicabilité de l'automatique sur les systèmes sous-échantillonnés chaotiquement. Ceci pose un problème ouvert, dont la résolution définit tout naturellement une perspective essentielle.

## RÉFÉRENCES

- [1] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, vol. 64, n°8, pp.821-824, 1990.
- [2] H. Nijmeijer. A dynamical control view on synchronization. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 154, n°3, pp.219-228, 2001.
- [3] R. Lozi. New enhanced chaotic number generators. *Indian journal of industrial and applied mathematics*, vol. 1, n°1, pp. 1-23, 2008.
- [4] Giuseppe Grassi. Observer-based hyperchaos synchronization in cascaded discrete-time systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 40, n°2, pp. 1029-1039, 2009.
- [5] A. Alessandri and P. Coletta. Design of luenberger observers for a class of hybrid linear systems. *Lecture notes in computer science*, vol. 2034, pp. 7-18, 2001.
- [6] G. Millerioux and J. Daafouz. *Chaos in Automatic Control*, chapitre Polytopic observers for synchronization of chaotic maps, pp. 323-344. Control Engineering Series. CRC Press, 2006.
- [7] U. Feldmann, M. Hasler, and W. Schwarz. Communication by chaotic signals : The inverse system approach. *International journal of circuit theory and applications*, vol. 24, n°5, pp. 551-579, 1996.
- [8] R. Vidal, A. Chiuso, and S. Soatto. Observability and identifiability of jump linear systems. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3614-3619, 2002.
- [9] S. Hénaff, I. Taralova, and R. Lozi. Exact and asymptotic synchronisation of a new weakly coupled maps function. *Journal of Nonlinear Systems and Applications*,